МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО

7 класс. Алгебра и теория чисел–1. 04 июня 2010 года

1. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выбрать так, чтобы для любых пяти выбранных чисел их сумма или произведение делилось на 5?

2. Найдите все простые p и q такие, что число $(p+1)^q$ является точным квадратом.

3. Найдите все трехзначные N такие, что сумма цифр числа $10^N - N$ делится на 2010.

4. Два девятизначных числа $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ и $\overline{b_1b_2\ldots b_9}$ таковы, что при замене любой цифры a_i первого числа на соответствующую цифру второго числа b_i получается число, кратное 7 (например, числа $\overline{b_1a_2a_3a_4\ldots a_9}$, $\overline{a_1b_2a_3a_4\ldots a_9}$ и т. д.). Докажите, что при замене любой цифры второго числа на соответствующую цифру первого числа тоже будет получаться число, кратное 7.

5. В числе $34! = 295232799039{\star}{\star}414084761860964352{\star}{\star}00000$, как Вы можете заметить, мы забыли написать некоторые цифры и вместо них написали $\star$. А какие это были цифры?

6. Приведите пример трехзначного числа A, обладающего удивительным свойством: если натуральные числа m и n таковы, что $mn+1$ делится на A, то и $m^2 - n^2$ делится на A.

7. Существуют ли четыре различных натуральных числа, сумма которых равна их наименьшему общему кратному?